Laplace-muunnos

Hieman yksinkertaistaen voisi sanoa, että Laplace-muunnos muuttaa derivaatan kertolaskuksi ja integroinnin jakolaskuksi. Tältä kannalta katsottuna Laplace-muunnoksen hyödyllisyyden ymmärtää; onhan kerto- ja jakolaskut huomattavasti helpompia laskea kuin derivoinnit ja integroinnit. Myös alkuarvojen käsittely muunnoksen avulla on helpompaa, koska differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua ei tarvitse missään vaiheessa laskea.

Ajasta riippuvan funktion *f(t)* Laplace-muunnosta merkitään *F(s)* tai *L{f(t)}* ja se määritellään integraalina:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

Muuttuja s on kompleksimuuttuja ja usein kompleksitasoa, jonka alkio s on, sanotaan Laplace-tasoksi tai s-tasoksi. Yleensä Laplace-muunnosten yhteydessä on tapana merkitä imaginääriyksikköä kirjaimella j.

Muunnos on olemassa kaikille sellaisille luonnossa esiintyville funktioille, joiden arvo on nolla ennen hetkeä $t=0$. Säätötekniikassa käsitelläänkin vain funktioita, jotka alkavat hetkellä $t=0$. Myös joillekin epäfysikaalisille funktioille, kuten impulssifunktioille, jonka energia on ääretön, voidaan tehdä Laplace-muunnos.

Laplace-tasosta päästään takaisin aika-tasoon käänteismunnoksella:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{b-j\infty}^{b+j\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s$$

Käänteismuunnoksessa integrointi suoritetaan kompleksitasossa ja vakio b valitaan siten, että muunnettavan funktion singulariteetit jäävät integroimispolun oikealle puolelle.

Eksponenttifunktion Laplace-muunnos

Lasketaan hetkellä nolla alkavan eksponenttifunktion Laplace-muunnos eli sijoitetaan muunnoskaavaan

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Laplace-muuttuja s voidaan yksinkertaisuuden vuoksi olettaa reaaliseksi ja suuremmamksi kuin $-a$. Muunnos on kyllä laajennettavissa kompleksimuuttujille.

$$
\begin{aligned}
L\{e^{-at}\} &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-(a+s)t} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{a+s} \Big/_0^\infty e^{-(a+s)t} \\
&= -\frac{1}{a+s} (0 - e^0) \\
&= \frac{1}{a+s}
\end{aligned}
$$

Oletusta $s > -a$ tarvittiin, jotta integraali olisi äärellinen. Päinvastaiseen tapaukseen perehdymme järjestelmien stabiilisuuden tarkastelun yhteydessä.

Muunnoksen ja käänteismuunnoksen laskeminen suoraan määritelmistä on työlästä, siksi yleisimmät funktiot ja niitä vastaavat muunnokset on koottu taulukoihin, joista ne löytyvät ilman integrointia. Taulukoita käytetään siten, että (käänteis)muunnettava funktio jaetaan palasiin, joiden (käänteis)muunnos löytyy taulukosta. Usein käänteismuunnettava funktio on rationaalifunktio eli kahden polynomin osamäärä. Tälläisen funktion hajottamiseen taulukosta löytyvin palasiin onnistuu osamurtokehitelmän avulla.

Seuraavassa taulukossa on lueteltu Laplace-muunnoksen ominaisuuksia. Taulukossa muunnettavaa ajan funktiota on merkitty pienellä kirjaimella ja vastaavaa Laplace-muunnettua funktiota isolla kirjaimella.

Ominaisuus	Muunnettava funktio	Laplace-muunnos
Lineaarisuus	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Vaimennus	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Viivästys	$f(t-a)u_s(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Skaalaus	$f(t/a),\ a > 0$	$aF(as)$
Derivaatta	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$	$sF(s) - f(0)$
n:s derivaatta	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t)$	$s^n F(s) - (s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0))$
Integraali	$\int_0^t f(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{s} F(s)$

Konvoluutio	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$F(s)G(s)$

Alku- ja loppuarvoteoreemat ovat myös tärkeitä esimerkiksi laskettaessa vasteen loppuarvoa. Jos tarvittavat raja-arvot ovat olemassa, pätee funktiolle ja sen Laplace-muunnokselle:

Alkuarvoteoreema: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ ja loppuarvoteoreema: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$.

Allaolevassa taulukossa on joidenkin useasti esiintyvien funktioiden muunnoksia. Näitä muunnospareja voi käyttää kumpaankin suuntaan.

Ajan funktio	Laplace-muunnos
f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1
$u_s(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}u_s(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$tu_s(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n u_s(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin(\omega t)u_s(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)u_s(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Taulukossa esiintyvä funktio $u_s(t)$ on yksikköaskelfunktio:

$$u_s(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Kaikki taulukon funktiot on kerrottu askelfunktiolla, koska, kuten edellä todettiin, säätötekniikassa käsitellään funktioita, jotka ovat nolla ennen hetkeä *t=0*.

Usein esiintyvä erikoisfunktio, impulssifunktio, $\delta(t)$ on nolla kaikilla muilla *t*:n arvoilla paitsi nollassa, jossa se on ääretön siten, että integraali reaaliakselin yli siitä on yksi:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ \text{kaikilla}\, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

Laplace-muunnosesimerkki 1

Laske $Y(s) = L\{(cos(\omega t) + A + Bt + Ct^2)u_s(t)\}$.

Käyttämällä muunnoksen lineaarisuutta voidaan muunnos tehdä paloissa.

$$Y(s) = L\{cos(\omega t)u_s(t)\} + AL\{u_s(t)\} + BL\{tu_s(t)\} + CL\{t^2 u_s(t)\}$$

Nyt vain etsitään muunnostaulukosta oikeat rivit ja kirjoitetaan muunnos niiden perusteella.

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{2C}{s^3}$$

Laplace-muunnosesimerkki 2

Laske Laplace-muunnos $Y(s) = L\left\{ \int_0^t e^{-a\tau} \sin(\omega\tau)u_s(\tau)(t-\tau)u_s(t-\tau)\mathrm{d}\tau \right\}$.

Kyseessä on konvoluutiointegraali, jossa kerrotaan keskenään funktiot $f(t) = e^{-at}\sin(\omega t)u_s(t)$ ja $g(t) = tu_s(t)$. Taulukosta nähdään, että konvoluution Laplace-muunnos on funktioiden Laplace-muunnoksien tulo. Muunnetaan siis molemmat funktiot erikseen.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$G(s) = L\{g(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

Funktion *f(t)* muuntamisessa käytettiin hyväksi muunnoksen vaimennusominaisuutta: eksponenttifunktiolla kertominen aikatasossa vastaa origon siirtoa Laplace-tasossa.

Lopullinen tulos saadaan kertomalla muunnetut funktiot keskenään.

$$Y(s) = F(s)G(s) = \frac{\omega}{s^2((s+a)^2 + \omega^2)}$$

Käänteismuunnos osamurtokehitelmällä

Tehtävänä on käänteismuuntaa funktio $Y(s) = \frac{s^2 - 2s - 3}{s^2 + s - 20}$.

Muokataan ensinnä funktio muotoon, jossa osoittaja on pienempää astetta kuin nimittäjä, lisäämällä ja vähentämällä osoittajasta sopiva termi. Tämän vaiheen voisi tehdä myös jakokulmassa.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^2-2s-3+\overbrace{(3s-17-3s+17)}^{=0}}{s^2+s-20} \\
&= \frac{s^2+s-20+(-3s+17)}{s^2+s-20} \\
&= 1+\frac{-3s+17}{s^2+s-20}
\end{aligned}
$$

Taulukosta löytyy käänteismuunnos ykköselle, mutta ei jälkimmäiselle termille. Jaetaan se yksinkertaisimpiin paloihin etsimällä nimittäjän juuret ja muodostamalla osamurtokehitelmä. Tässä tapauksessa juuret löytyvät helposti, koska nimittäjä on toisen asteen polynomi. Jos nimittäjä on monimutkainen korkea-asteinen polynomi, joudutaan juuret mahdollisesti ratkaisemaan numeerisesti tietokoneella.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= 1+\frac{-3s+17}{s^2+s-20} \\
&= 1+\frac{-3s+17}{(s+5)(s-4)} \\
&= 1+\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s-4}
\end{aligned}
$$

Vakiot *A* ja *B* ratkaistaan esimerkiksi vertaamalla kahden viimeisen rivin rationaaliosia keskenään ja kertomalla niistä syntyvä yhtälö puolittain nimittäjällä ja vaatimalla, että molempien puolien kertoimet ovat yhtäsuuret, kuten seuraavassa on tehty.

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{s+5}+\frac{B}{s-4} &= \frac{-3s+17}{(s+5)(s-4)} \\
A(s-4)+B(s+5) &= -3s+17 \\
(A+B)s-4A+5B &= -3s+17
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} A+B=-3 \\ -4A+5B=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{32}{9} \\ B=\frac{5}{9} \end{cases}
$$

Osamurtokehitelmän muodostamisen jälkeen käänteismuunnettava funktio on siis muodossa

$$
Y(s)=1-\frac{32}{9}\frac{1}{s+5}+\frac{5}{9}\frac{1}{s-4}
$$

Tämä voidaan käänteismuuntaa termeittäin Laplace-muunnoksen lineaarisuuden perusteella. Vastaukseksi saadaan:

$$
y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=\delta(t)-\frac{32}{9}e^{-5t}u_s(t)+\frac{5}{9}e^{4t}u_s(t)
$$

Moninkertainen juuri osamurtokehitelmässä

Käänteismuunnetaan funktio

$$
F(s)=\frac{4s-8}{s^4-9s^3+27s^2-27s}=\frac{4s-8}{s(s-3)^3}
$$

Nyt osoittaja on jo valmiiksi alempaa astetta kuin nimittäjä, voidaan siis heti siirtyä tekemään osamurtohajotelmaa. Koska nimittäjällä on kolminkertainen nollakohta, täytyy osamurtokehitelmään ottaa mukaan kaikki moninkertaisen juuren potenssit:

$$\frac{4s-8}{s(s-3)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{(s-3)^2} + \frac{D}{(s-3)^3}$$

Tästä jatketaan kuten edellisessä esimerkissä, eli kerrotaan nimittäjällä ja vaaditaan kertoimet molemmilla puolilla samoiksi.

$$4s-8 = A(s-3)^3 + Bs(s-3)^2 + Cs(s-3) + Ds$$
$$4s-8 = (A+B)s^3 + (-9A-6B+C)s^2 + (27A+9B-3C+D)s - 27A$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -9A-6B+C = 0 \\ 27A+9B-3C+D = 4 \\ -27A = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{8}{27} \\ B = -\frac{8}{27} \\ C = \frac{8}{9} \\ D = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Osamurtokehitelmän tulos on siis:

$$F(s) = \frac{8}{27}\frac{1}{s} - \frac{8}{27}\frac{1}{s-3} + \frac{8}{9}\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{(s-3)^3}$$

Termien käänteismuuntamista varten tarvitaan muunnostaulukosta kaavaa

$$L\{t^n u_s(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Muuntamisen helpottamiseksi jaetaan kaava puolittain n-kertomalla ja viedään n-kertoma vasemmalla puolella muunnoksen sisään. Näin voidaan tehdä, koska Laplace-muunnos on lineaarinen, mikä tarkoittaa, että vakion saa viedä Laplace-operaattorin sisään.

$$L\left\{\frac{t^n}{n!}u_s(t)\right\} = \frac{1}{s^{n+1}} \iff L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u_s(t)$$

Käytetään tätä käänteismuunnoskaavaa erikseen jokaiseen muunnettavan funktion yhteenlaskettavaan termiin. Kolmessa viimeisessä termissä on mukana origon siirto, mikä aiheuttaa käänteismuunnokseen eksponenttitermin. Lopullinen vastus on:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \left(\frac{8}{27} - \frac{8}{27}e^{3t} + \frac{8}{9}te^{3t} + \frac{4}{6}t^2e^{3t}\right)u_s(t)$$

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen Laplace-muunnoksella

Ratkaistaan Laplace-muunnoksella sama differentiaaliyhtälö, joka aikaisemmin ratkaistiin integroimalla. Myös alkuehdot ovat samat.

$$y''(x) = e^{-x}$$

$$y'(0) = 1$$
$$y(0) = 10$$

Laplace-muunnetaan yhtälön molemmat puolet. Alkuarvoja tarvitaan derivaattatermin muunnoksessa.

$$s^2Y(s) - (s \cdot 10 + 1) = \frac{1}{s+1}$$

Ratkaistaan syntyneestä algebrallisesta yhtälöstä *Y(s)*.

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s+1} + 10s + 1\right) = \frac{1}{s^2(s+1)} + \frac{10}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Lausekkeen ensimmäiselle termille täytyy tehdä osamurtokehitelmä. Sillä on kaksinkertainen juuri nollassa, joten osamurtokehitelmään tulee ottaa mukaan termit *1/s* ja $1/s^2$.

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1}$$
$$A(s+1) + Bs(s+1) + Cs^2 = 1$$
$$(B+C)s^2 + (A+B)s + A = 1$$
$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Osamurtokehitelmän jälkeen lauseke on

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s^2} + \frac{9}{s}$$

Tämä voidaan käänteismuuntaa, jolloin saadaan sama tulos kuin integraalien avulla laskettaessa.

$$y(x) = e^{-x} + 2x + 9$$

Näin yksinkertaisessa tapauksessa Laplace-muunnoksen erinomaisuus ei käy selvästi ilmi, mutta jos differentiaaliyhtälössä olisi monen eri kertaluokan derivaattoja olisi Laplace-muunnos helpoin keino ratkaista yhtälö.