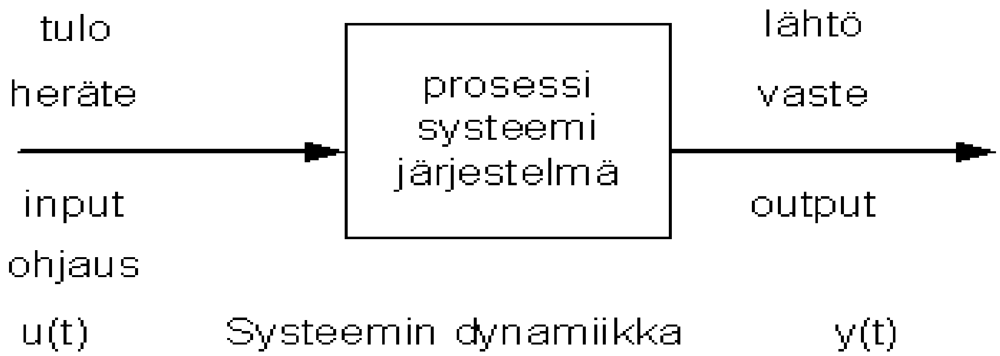
Dynaamisen järjestelmän siirtofunktio

Nyt päästään soveltamaan matriisilaskentaa ja Laplace-muunnosta. Tutkikaamme, miten lineaarista mallia voidaan käsitellä. Kuten edellä on jo nähty säätötekniikassa käsitellään yleensä erilaisia järjestelmiä, jotka kuvataan yleisesti lohkokaavioina. Nuolet lohkojen välillä kuvaavat kausaliteettia.



Heräte *u* vaikuttaa systeemiin, jonka lähtö puolestaan on ulostulo. Jotta tietäisimme, miten erilaiset inputit vaikuttavat, on järjestelmän dynamiikka kuvattava matemaattisesti. Tässä osassa käsittelemme lineaarisia vakiokertoimisia järjestelmiä. Viimeisessä luvussa on lyhyt johdatus epälineaarisiin järjestelmiin ja niiden linearisointiin.

Oletetaan, että järjestelmää ja sen dynamiikkaa kuvaa tavallinen differentiaaliyhtälömalli

$$\dot{y}(t) + ay(t) = u(t).$$

(Säätötekniikassa on yleisesti tapana merkitä aikaderivaattaa pisteellä:

$\dot{y}(t) \triangleq \frac{dy}{dt}$, $\ddot{y}(t) \triangleq \frac{d^2y}{dt^2}$)

Laplace –muunnetaan järjestelmän dynamiikkayhtälö termeittäin.

$sY(s) - y(0) + aY(s) = U(s)$

Tavallisesti systeemi on alussa lepotilassa, jolloin myös alkuarvot ovat nollia, $y(0) = 0$. Tällöin yhtälö on muotoa

$(s + a)Y(s) = U(s)$.

Järjestelmän *siirtofunktioksi* (systeemin malliksi) nimitetään ulostulon ja sisäänmenon suhdetta.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+a}$$

Jos ajatellaan, miten järjestelmä muuntaa tietyn inputin, niin saamme

$Y(s) = G(s)U(s)$.

Siirtofunktio siis kertoo, miten järjestelmä kuvaa tietyn inputin Laplace-tasossa. Palaamme tähän vielä myöhemmin (katso konvoluutiointegraali edellä).

Koska tutkimamme mallin nimittäjä on 1. kertalukua, sitä kutsutaan 1. kertaluvun malliksi.

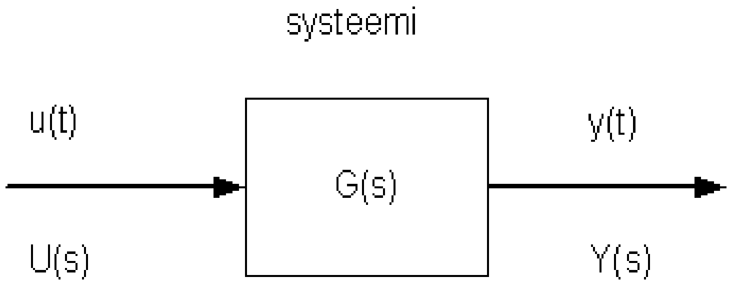
Siirtofunktion muodostaminen systemaattisesti

Ensimmäinen tehtävä on kirjoittaa järjestelmää kuvaavat differentiaaliyhtälöt, jotka muodostetaan fysiikan lakien avulla. Tavallisia ovat Newtonin liikeyhtälöt ja erilaiset massataseyhtälöt.

Kun on saatu muodostettua differentiaaliyhtälöt, ne Laplace-muunnetaan olettaen alkuarvot asetetaan nolliksi. Tähän olemassa selvät perusteet: Jos järjestelmä ei ole tasapainotilassa, muuttujat voidaan aina skaalata siten, että alkuarvot ovat nollia.

Tämän jälkeen ratkaistaan haluttu siirtofunktio *G(s)*. Sen ei tarvitse välttämättä olla juuri sisäänmenon ja ulostulon välillä, vaan yhtä hyvin siirtofunktio voidaan laskea häiriöstä ohjaukseen tai ulostuloon.

Usein halutaan tietää, mikä on ulostulo tietyllä sisäänmenolla. Tällöin ratkaistaan haluttu suure *s*-tasossa ja käänteismuunnetaan lauseke lopulta aikatasoon edellä opituin konstein.



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

Siirtofunktio aikatasossa

Aikatasossa lineaarisen järjestelmän tulo-lähtöriippuvuutta kuvaa konvoluutiointegraali

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$
,

missä y on lähtösuure, u on tulosuure ja g on painofunktio. Kaava kertoo, miten painofunktion avulla painotetaan tulosignaalia eri ajan hetkinä; lähtösignaali on sitten summa (integraali) näistä painotetuista komponenteista. Signaaliksi ymmärrettynä painofunktio yhtyy impulssivasteeseen. Painofunktion L-muunnos on siirtofunktio.

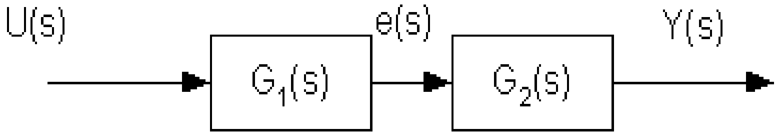
Huom! $Y(s) = G(s)U(s)$

Lohkokaavion muokkaaminen

Ongelman hahmottamiseksi ja helpottamiseksi koko käsiteltävää systeemiä kuvataan säätötekniikassa lohkokaavioilla prosessitekniikan PI-kaavioiden tapaan. Osajärjestelmät ovat suorakaiteen muotoisia lohkoja, joiden välille on piirretty yhdistäviä nuolia, jotka kuvaavat kausaliteettiä. Tästä oli esimerkki jo johdanto-osassa.

Eri lohkoja voidaan yhdistellä ja niiden välille on olemassa omat laskusäännöt (*lohkokaavioalgebra*). Kun tiettyä rajattua aluetta muutetaan, eivät alueen sisäänmeno ja ulostulo muutu. Tällöin voi syntyä tilanteita, joissa kaikille signaaleille ei välttämättä ole olemassa mitään järkevää fysikaalista tulkintaa.

Seuraavassa kuvassa esitetty kaksi lohkoa peräkkäin.



Lohkot yhdistävälle suureelle $e(s)$ voidaan johtaa lauseke

$e(s) = G_1(s)U(s)$

Samoin ulostulolle saadaan:

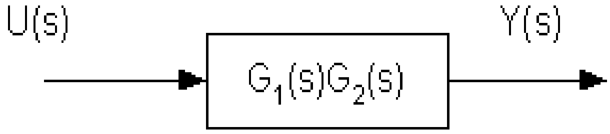
$Y(s) = G_2(s)e(s)$

Yhdistämällä nämä saadaan:

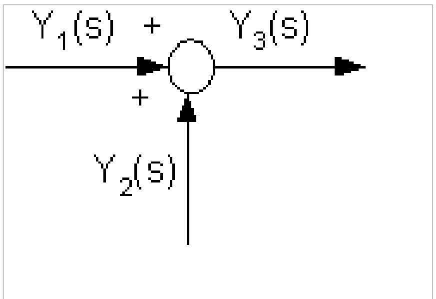
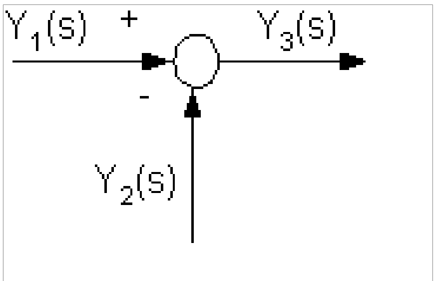
$$Y(s) = G_2(s)e(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

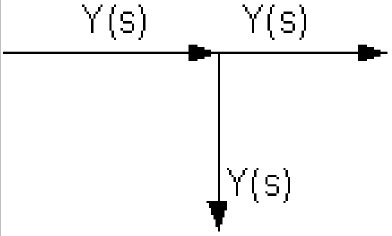
$$\Rightarrow G_{tot}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

Saatiin tulos, että koko järjestelmää kuvaava siirtofunktio on osasiirtofunktioiden tulo. Tämä on täysin yleistettävissä aikavariantteihin ja lineaarisiin yksimuuttujajärjestelmiin. Sarjassa olevat systeemit voi yhdistää yhdeksi kokonaisuudeksi, joka on osajärjestelmien tulo.



Lohkokaaviossa voi olla myös erilaisia haarautumis- ja summauspisteitä. Niitä käsitellään seuraavasti:

	Summauspisteeseen voidaan soveltaa normaalia virranjakolakia. Lähtevien summa = tulevien summa Tämän perusteella saadaan: $Y_3(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$
	Erotus tulkitaan summana, jossa toinen tuleva on kerrottu –1:llä. $Y_3(s) = Y_1(s) - Y_2(s)$

	Haarautumiseen virranjako ei sovi. Kyseessä on informaation siirtymisestä. jolloin haarautumispisteestä poistuu sama tieto molempiin haaroihin. Tätä voi verrata salaisuuden kertomiseen jollekulle: sen jälkeen molemmat tietävät koko salaisuuden eivätkä esimerkiksi vain puolta siitä.

Testifunktiot

Tutkittaessa dynaamista järjestelmää ei useinkaan ole tarkkaa tietoa esimerkiksi sisäänmenevistä signaaleista. Tämän takia simuloinneissa käytetään usein kanonisia määrämuotoisia signaaleita eli testifunktioita. Tyypillisesti ne ovat impulssi-, askel- ja pengerfunktioita, suorakaide- ja siniaalto tai normaalijakautunut satunnaissignaali.

Esimerkki 1

Laske yksikköaskelvaste.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Heräte: $L[u(t)] = U(s)$

Vaste: $L[y(t)] = Y(s)$

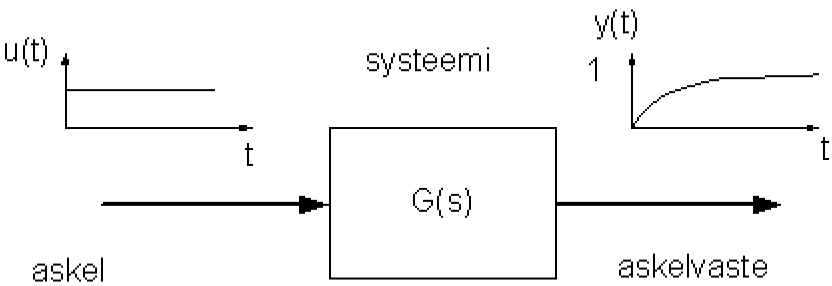
$Y(s) = G(s)U(s)$

Askel: $u(t) = 1$, joten $U(s) = 1/s$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)} \quad \text{(M8)}$$

$y(t) = 1 - e^{-t}$

Esimerkki 2



Laplace-muunna

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = cf(t)$$

ja laske sitten $Y(s)$, kun $f(t) = u(t) = te^{-t}$.

Laplace-muunnetaan aluksi differentiaaliyhtälö termeittäin.

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - s\dot{y}(0) - \ddot{y}(0) + a\left[sY(s) - y(0)\right] + bY(s) = cF(s)$$

Siirtofunktiota laskettaessa alkuarvot voidaan olettaa nolliksi.

$$y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$$

Tällöin

$$s^3Y(s) + asY(s) + bY(s) = cF(s)$$

$$\left(s^3 + as + b\right)Y(s) = cF(s)$$

ja lopullinen siirtofunktio

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{c}{s^3 + as + b}.$$

Herätteenä oli $f(t) = te^{-t}$. Käytetään nyt kaavakokoelmasta löytyvää tulosta

$$tf(t) \;\dot{=}\; -\frac{d}{ds}F(s) \quad \text{(T6)}$$

$$\Rightarrow L\left[te^{-t}\right] = -\frac{d}{ds}L\left[e^{-t}\right] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right) = -\left[-\frac{1}{(s+1)^2}\right] = \frac{1}{(s+1)^2}$$

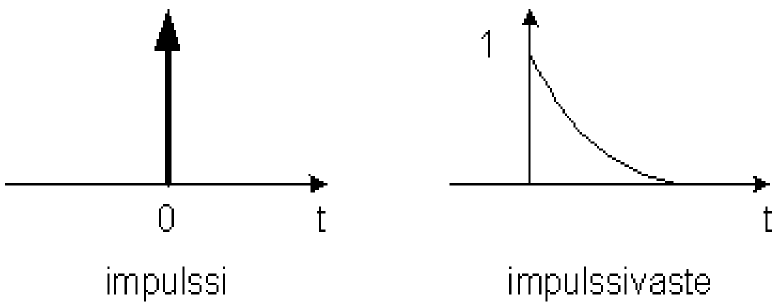
$$\Rightarrow Y(s) = \frac{c}{\left(s^3 + as + b\right)} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$$

Tästä voi $y(t)$:n laskea käänteismuunnoksella.

Esimerkki 3

Laske impulssivaste, kun $G(s) = \dfrac{1}{s+1}$

Herätteenä on nyt impulssi eli $r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1$ (M1)



$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{s+1} \cdot 1 = \frac{1}{s+1} = G(s)$$

$y(t) = e^{-t}$

Huomataan, että impulssivasteen Laplace-muunnos on siirtofunktio ($L[y(t)] = G(s)$), eli impulssivaste on siirtofunktion käänteismuunnos.